บทที่ 1

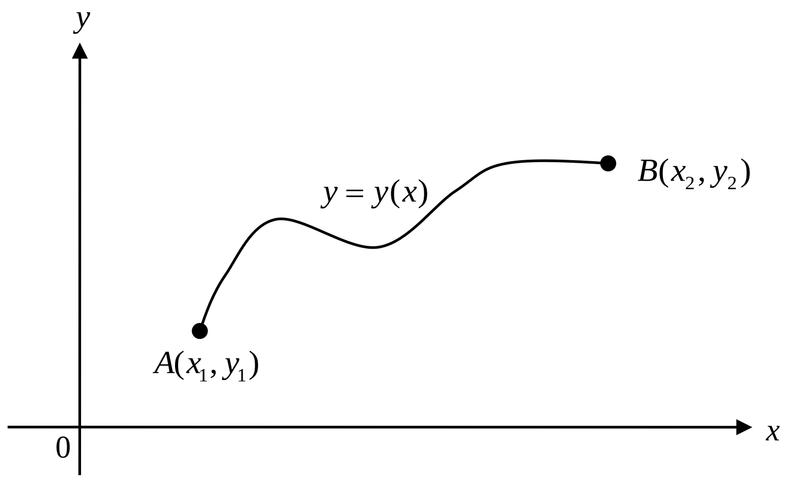
บทนำแคลคูลัสของการแปรผัน

แคลคูลัสของการแปรผันเกี่ยวข้องกับการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันนัลซึ่งเป็นฟังก์ชันของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า ในบทนี้เราจะได้แนะนำปัญหาของแคลคูลัสของการแปรผัน จากนั้นจะทบทวนการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันโดยวิธีตัวคูณลากรานจ์

แคลคูลัสของการแปรผันมีการประยุกต์ใช้งานอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งใน การหาสมการการเคลื่อนที่ในปัญหากลศาสตร์

1.1 ปัญหาของแคลคูลัสของการแปรผัน

แคลคูลัสของการแปรผัน (calculus of variations) เป็นปัญหาการหา**ค่าสุดขีด** (extrema) ของฟังก์ชันนัลที่มีฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่ารวมอยู่ด้วย โดยคำว่าค่าสุดขีดหมายความรวมทั้ง**ค่าสูงสุด** (maxima) และ **ค่าต่ำสุด**(minima) พิจารณาเส้นโค้งที่เชื่อมจุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ บนระนาบ ซึ่งมีเส้นโค้งดังกล่าวได้หลายเส้น แต่จะสนใจหาเส้นโค้งที่มีความยาวน้อยสุด



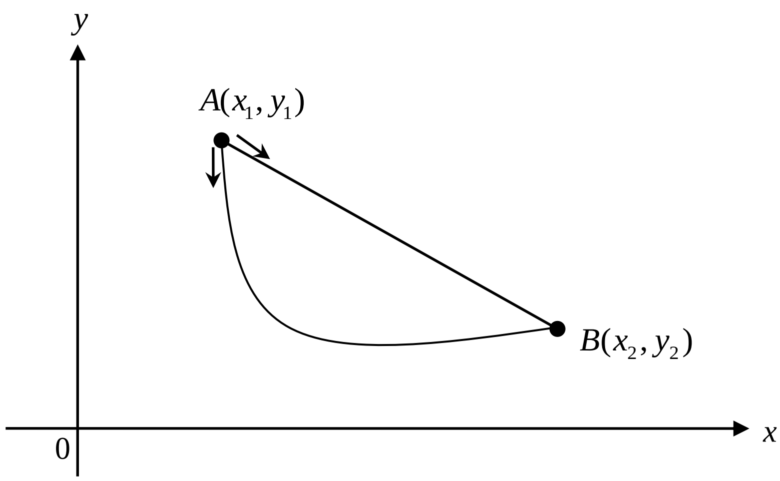
รูป 1.1 เส้นโค้งที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในระนาบ

พิจารณารูป 1.1.1 ให้ *y*=*y*(*x*) เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุด *A* และ *B* ที่กำหนด และถ้าให้ *l* แทน

ความยาวของส่วนโค้งนี้ เราจะเห็นว่าค่าของ *l* ขึ้นกับฟังก์ชัน *y*(*x*) ตามสมการ

$$l(y(x)) = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx \qquad (1.1)$$

ลักษณะอินทิกรัลที่กำหนดความยาวส่วนโค้งในสมการ (1.1) เรียกว่า**ฟังก์ชันนัล** (functional) ซึ่งก็คือ**ฟังก์ชันของฟังก์ชัน**นั่นเอง หรืออาจกล่าวให้เห็นความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันกับฟังก์ชันนัลได้ว่าฟังก์ชันส่งค่าจากเซตของจำนวนไปยังเซตของจำนวน แต่ฟังก์ชันนัลส่งค่าจากเซตของฟังก์ชันไปยังเซตของจำนวน สิ่งที่สนใจหาคือฟังก์ชัน $y(x)$ ที่ให้ค่าน้อยสุดของความยาวส่วนโค้ง $l(y(x))$ ตามสมการ (1.1) ซึ่งทราบกันดีว่าคำตอบของปัญหานี้ฟังก์ชันเส้นตรงที่ผ่านจุด *A* และ *B* ในรูป 1.1. อย่างไรก็ตาม ยังมีปัญหาอีกหลายปัญหาที่คล้ายคลึงกัน แต่ไม่อาจคาดเดาหรือหาคำตอบได้ง่ายๆ เช่น**ปัญหาบราคิสโทโครน** (problem of brachistochrone) ที่ Johann Bernoulli ได้ตีพิมพ์เป็นครั้งแรกใน ค.ศ. 1696 โดยเขาต้องการหาสมการเส้นโค้งที่เชื่อมจุด *A* และจุด *B* ที่กำหนดให้ และเส้นโค้งนี้มีสมบัติว่าเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งที่จุด *A* ไปจุด *B* ตามเส้นโค้งนี้ภายใต้อิทธิพลของสนามโน้มถ่วงคงตัวแล้วอนุภาคจะใช้เวลาในการเดินทางน้อยสุด

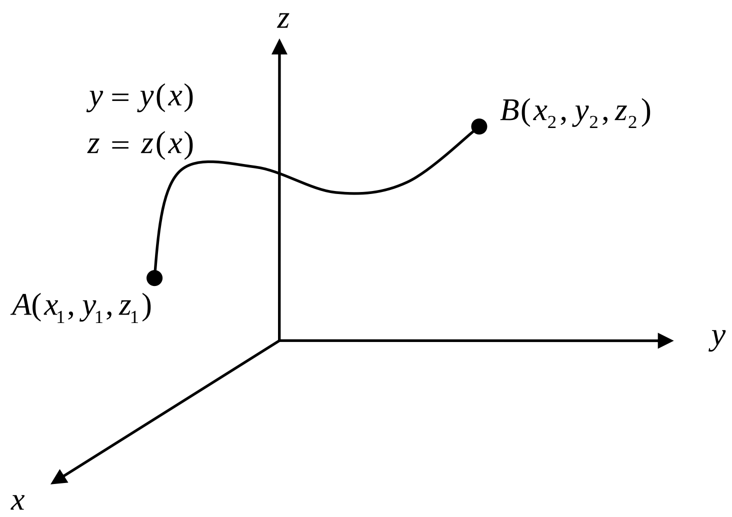


รูป 1.2 ปัญหาบราคิสโทโครน

จากรูป 1.2 จะเห็นว่าอนุภาคจะเคลื่อนที่จากจุด *A* ไปยังจุด *B* ได้ด้วยเส้นทางหลายเส้นทาง ซึ่งทราบกันดีว่าระยะทางที่สั้นสุดก็คือเส้นตรงที่เชื่อมจุด *A* และจุด *B* แต่เส้นทางที่สั้นสุดนี้อาจจะไม่ได้ให้เวลาที่น้อยสุดในการเคลื่อนที่ก็ได้ ทั้งนี้เพราะอนุภาคเริ่มต้นจากหยุดนิ่งที่จุด *A* และจะใช้เวลามากในช่วงต้นของการเคลื่อนที่ แต่เมื่อลองพิจารณาเส้นโค้งในรูป 1.2 จะเห็นว่าอนุภาคตกดิ่งลงมาในช่วงแรก จึงมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้นเร็ว แม้ว่าจะเคลื่อนที่ตามเส้นทางที่มีระยะมากกว่า แต่อัตราเร็วที่เพิ่มขึ้น ก็อาจทำให้เวลาในการเคลื่อนที่ตลอดเส้นทางน้อยกว่าเวลาที่ใช้เคลื่อนที่ตามเส้นตรงที่เชื่อมจุด *A* และ *B* ก็ได้สิ่งที่น่าสนใจสำหรับปัญหาข้อนี้คือ เราจะหาเส้นทางที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จากจุด *A* ถึงจุด *B* โดยใช้เวลาน้อยสุดได้อย่างไร แม้ว่าปัญหาข้อนี้จะถูกแก้โดย Johann Bernoulli, Jacob

Bernoulli, Leibnitz, Newton, l'Hoˆpital แต่ปัญหาของแคลคูลัสของการแปรผันได้ถือกำเนิดขึ้นอย่างเป็นแบบแผนจากงานของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ที่มีชีวิตอยู่ในช่วง ค.ศ. 1707 – 1783 จึงถือว่าออยเลอร์เป็นผู้ให้กำเนิดแคลคูลัสของการแปรผัน

นอกจากปัญหาของบราคิสโทโครนที่นับเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสของการแปรผันแล้ว ยังมีปัญหาอีกสองลักษณะที่มีอิทธิพลต่อพัฒนาการของแคลคูลัสของการแปรผัน คือ ปัญหาจีออเดสิก (geodesics) และปัญหา isoperimetric



รูป 1.3 ปัญหาจีออเดสิก

ปัญหาจีออเดสิก เกี่ยวข้องกับการหาเส้นสั้นสุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่กำหนดให้บนผิวต่างๆ ซึ่งถ้าผิวนั้นเป็นระนาบ เส้นสั้นสุดที่ต้องการก็คือเส้นตรงนั่นเอง แต่ถ้าผิวนั้นเป็นผิวทรงกลมหรือผิวอื่นๆ แล้วเส้นโค้งสั้นสุดไม่จำเป็นจะต้องเป็นเส้นตรง พิจารณาตัวอย่างของเส้นโค้งในปริภูมิสามมิติ เราต้องการหาความยาวของเส้นโค้งที่เชื่อมจุด $A(x_1,y_1)$ และจุด $B(x_2,y_2)$ ที่กำหนดให้ ถ้าให้เส้นโค้งนี้กำหนดได้ด้วยสมการ *y=y(x)* และ *z=z(x)* ดังแสดงในรูป 1.1.3 แล้วความยาวของเส้นโค้งนี้คือ

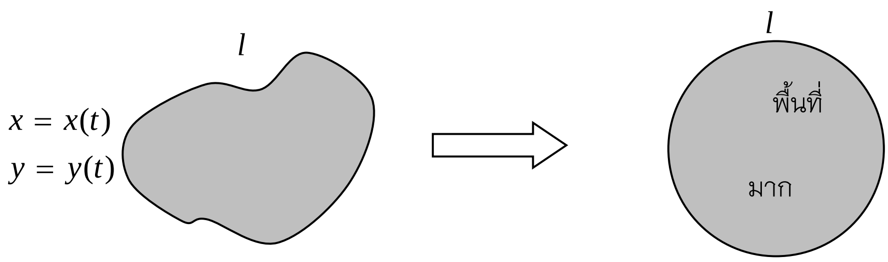
$$l(y(x),z(x))=\int_A^B\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dz}{dx})^2}\,dx \qquad (1.2)$$

แต่จุด (x,y,z) จะต้องอยู่บนผิวที่กำหนดให้เท่านั้น ถ้าผิวนี้เขียนแทนด้วยสมการ

$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad (1.3)$$

ก็หมายความว่าเราจะต้องหาฟังก์ชัน $y(x)$ และ $z(x)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนัล (1.2) มีค่าน้อยสุด และแต่ละจุด (x, y, z) จะต้องสอดคล้องกับ**เงื่อนไขบังคับ** (constraint) ในสมการ (1.3) ด้วย ซึ่ง Jacob Bernoulli สามารถแก้ปัญหานี้ได้สำเร็จในปี ค.ศ. 1968 และต่อมา ออยเลอร์และลากรานจ์ก็สามารถหาผลเฉลยทั่วไปสำหรับปัญหาลักษณะนี้ได้

ปัญหาต่อไปคือปัญหา isoperimetric ซึ่งเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันนัลภายใต้เงื่อนไขบังคับที่เส้นรอบรูปมีความยาวตามกำหนด หรือกล่าวได้เข้าใจง่ายๆ ได้ด้วยปัญหาเส้นเชือกที่มีความยาว l เมื่อนำเส้นเชือกนี้มาล้อมเป็นรูปปิด จะต้องล้อมเป็นรูปปิดใด พื้นที่รูปปิดจึงจะมากสุด



รูป 1.4 isoperimetric

ถ้าเส้นโค้งที่ล้อมรูปปิดเขียนแทนด้วยสมการอิงตัวแปรเสริม $x = x(t)$ และ $y = y(t)$ เมื่อ

$t_1 < t < t_2$

และมีเงื่อนไขบังคับว่าเส้นรอบรูปมีความยาว l นั่นก็คือ

$$l(y(x)) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt \qquad (1.4)$$

และต้องการหาค่ามากสุดของพื้นที่รูปปิด ซึ่งกำหนดได้ด้วยสมการ

$$A = \int_{t_1}^{t_2} yx'(t)dt \qquad (1.5)$$

ในปัญหานี้ จึงต้องการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันนัล (1.5) ภายใต้เงื่อนไขเงื่อนไขบังคับ (1.4) ซึ่งออยเลอร์เป็นผู้ค้นพบวิธีแก้ปัญหาลักษณะนี้

1.2 การหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันและวิธีตัวคูณลากรานจ์

ก่อนที่จะศึกษาแคลคูลัสของการแปรผันซึ่งเป็นการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันนัล เราจะมาทบทวน วิธีหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันเสียก่อน โดยให้พิจารณาค่า y ซึ่งกำหนดโดย $y = f(x)$ เมื่อ $x \in (a,b)$ ถ้า f มีอนุพันธ์ต่อเนื่องในช่วงดังกล่าวแล้ว จะได้ว่า

1. **เงื่อนไขจำเป็น**(necessary condition) ที่ f จะมีค่าสุดขีดที่ $x_0 = x$ ก็คือ $f'(x_0) = 0$
2. **เงื่อนไขเพียงพอ**(sufficient condition) ที่ f จะมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x_0 = x$ ก็คือ

$f'(x_0) = 0$ และ $f''(x_0) < 0$ ในกรณีของค่าสูงสุดหรือ และ $f''(x_0) > 0$ ในกรณีของค่าต่ำสุด

ถ้า *z* เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระสองตัว กล่าวคือ $z = f(x,y)$ ในบริเวณ *D* และถ้า z มี อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ที่ต่อเนื่องบนบริเวณ *D* แล้วเงื่อนไขจำเป็นที่จะทำให้ *z* มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0), ในบริเวณ *D* ก็คือ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) ซึ่งเงื่อนไขนี้สมมูลกับ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0 \tag{1.6}$$

ที่จุด (x_0, y_0) สำหรับค่า dx และ dy ใดๆ

เงื่อนไขเพียงพอที่ z จะมีค่าสุดขีดคือ

1. $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) > 0$ และ
2. $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) < 0$ กรณีของค่าสูงสุด หรือ $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) > 0$ ในกรณีของค่าต่ำสุด

ในกรณีทั่วไป ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ต่อเนื่องแล้ว เงื่อนไขจำเป็นที่ *f* จะมีค่าสุดขีดที่จุดหนึ่งคือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{1.7}$$

ที่จุดนั้น สำหรับค่า $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ใดๆ

จุดที่สอดคล้องกับสมการ (1.7) เรียกว่า **จุดนิ่ง** (stationary point) ของ f

ถ้าหาก $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นอิสระต่อกัน เงื่อนไข (1.7) จะสมมูลกับ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{1.8}$$

และเงื่อนไขเพียงพอที่จะให้ค่าสุดขีดจะเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

อย่างไรก็ตาม ถ้าตัวแปรทั้ง n ตัวไม่ได้เป็นอิสระต่อกัน แต่สัมพันธ์กันด้วยเงื่อนไข m เงื่อนไขที่เขียนได้ในรูป

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{1.9}$$

แล้วในทางทฤษฎีจะสามารถแก้สมการ m สมการนี้เพื่อที่จะเขียนตัวแปร m ตัวในรูปของตัวแปร $n-m$ ตัวที่เหลือได้ หรือกล่าวว่า f และ df สามารถเขียนในรูปของตัวแปรอิสระ $n-m$ ตัวแปรได้ แต่ในทางปฏิบัติแล้ว การแก้สมการ m สมการใน (1.9) นั้นอาจทำได้ยาก เพราะฟังก์ชัน φ_k อาจเป็นฟังก์ชันที่มีรูปแบบซับซ้อน

อย่างไรก็ตาม สามารถเขียนสมการ (1.9) ในรูปดิฟเฟอเรนเชียลเป็น

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.10}$$

วิธีที่สะดวกยิ่งกว่าในการหาค่าสุดขีดที่มีเงื่อนไขบังคับในลักษณะของเงื่อนไข (1.9) นี้ คือ**วิธีตัวคูณลากรานจ์** (method of Lagrange multipliers) ซึ่งจะอธิบายด้วยตัวอย่างฟังก์ชันในรูป $f(x,y,z)$ ที่มีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

เงื่อนไขจำเป็นที่ทำให้ f มีค่าสุดขีดคือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \tag{1.12}$$

และเงื่อนไขบังคับ (1.11) สามารถเขียนในรูปดิฟเฟอเรนเชียลได้เป็น

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

เราสามารถแก้สมการ (1.13) เพื่อหาค่า dx และ dy ในรูปของ dz แล้วแทนกลับลงไปใน(1.12) ได้ แต่ผลที่ได้ก็จะยังคงมีรูปแบบที่ซับซ้อน แต่ถ้าเราเลือกค่าคงตัว λ_1 และ λ_2 ที่เหมาะสม แล้วคูณสมการแรกใน (1.13) ด้วย λ_1 และคูณสมการที่สองใน (1.13) ด้วย λ_2 แล้วบวกกับสมการ (1.12) เราจะได้

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dy\\&\qquad+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)dz=0\end{aligned}\tag{1.14}$$

ซึ่งเรายังสามารถเลือก λ_1 และ λ_2 ที่ต้องการได้ ดังนั้นเราเพียงแต่เลือกค่า λ_1 และ λ_2 ที่ทำให้นิพจน์ในวงเล็บสองวงเล็บในสมการ (1.14) มีค่าเป็นศูนย์ เราจะพบว่าอีกวงเล็บที่เหลือก็ต้องมีค่าเป็นศูนย์ด้วย จึงได้

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}dz=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}dx+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}dz=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial z}dx+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}dy+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}dz=0\end{cases}\tag{1.15}$$

สมการ (1.11) และ (1.15) รวมกันจะมีทั้งหมด 5 สมการและมีตัวแปรที่ต้องหาค่าทั้งหมด 5 ตัวแปร คือ x, y, z, λ_1, λ_2 เราเรียก λ_1 และ λ_2 ว่า**ตัวคูณลากรานจ์** (Lagrange multipliers) ซึ่งทำให้การหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขบังคับทำได้ง่ายขึ้น และในหลายๆ กรณี ตัวคูณลากรานจ์จะมี ความหมายเชิงกายภาพด้วย สุดท้าย เราจะสังเกตเห็นว่าเงื่อนไข (1.15) ก็คือเงื่อนไขค่าสุดขีดสำหรับ $f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ เมื่อไม่มีเงื่อนไขบังคับนั่นเอง

ตัวอย่าง 1.1 จงหาจุดบนพื้นผิว $x^2+y^2+z^2=1$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(1,2,3)$ มากที่สุด

วิธีทำ ระยะระหว่างจุด (x,y,z) ใดๆ กับ $(1,2,3)$ คือ

$$r=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

ในที่นี้เราจะพิจารณาค่าของระยะทางกำลังสองซึ่งจะเป็นฟังก์ชันที่นำมาใช้คำนวณได้ง่ายกว่า จึงต้องการค่าน้อยสุดของ

$$f=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\tag{1.16}$$

โดยที่ (x, y, z) สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{1.17}$$

โดยวิธีตัวคูณลากรานจ์ เราให้ $H = f + \lambda\varphi$ ซึ่งจะได้

$$H = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \tag{1.18}$$

$$H_x = (x-1) + \lambda x \tag{1.19}$$

$$H_y = (y-2) + \lambda y \tag{1.20}$$

$$H_z = (z-3) + \lambda z \tag{1.21}$$

ให้ $H_x = H_y = H_z = 0$ เราจะได้

$$x = \frac{1}{1+\lambda} \tag{1.22}$$

$$y = \frac{2}{1+\lambda} \tag{1.23}$$

$$z = \frac{3}{1+\lambda} \tag{1.24}$$

เมื่อแทน (1.22)- (1.24) ใน (1.17) จะได้

$$\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{1+\lambda}\right)^2 = 1$$

$$(1+\lambda)^2 = 14$$

$$\lambda = \pm\sqrt{14} - 1$$

ดังนั้น $x = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{14}}$, $z = \pm\frac{3}{\sqrt{14}}$ ซึ่งไม่มีแทนค่าใน (1.16) จะได้

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 15 - 2\sqrt{14}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right) = 15 + 2\sqrt{14}$$

นั่นคือระยะทางจากจุดบนพื้นผิวอยู่ห่างจุด $(1, 2, 3)$ มากที่สุดคือ $\sqrt{15 + 2\sqrt{14}}$

และจุดบนพื้นผิวอยู่ห่างจุด $(1, 2, 3)$ มากที่สุดคือ $\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

1.3 แบบฝึกหัด

1. เส้นโค้งหนึ่งในปริภูมิสามมิติเขียนแทนได้ด้วยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

เมื่อ $a \le t \le b$ จงแสดงว่าความยาวของส่วนโค้งนี้กำหนดโดย

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$$

2. จงแก้ปัญหาค่าสุดขีดต่อไปนี้ โดยอาศัยวิธีตัวคูณลากรานจ์
   2.1 จงหาพื้นที่มากสุดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในวงกลมรัศมี *R*
   2.2 จงหาจุดเส้นโค้ง $x^2 + xy + y^2 = 3$ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด
   2.3 จงหาปริมาตรมากสุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมที่มีแต่ละหน้าขนานกับระนาบพิกัด และบรรจุในทรงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   2.4 จงหาจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดบนเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของระนาบ $x + y + z = 12$ และผิวพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$