Assignment 1

วิชา 040203211 Engineering Mathematics III ภาคเรียนที่ 1/2567

คำชี้แจง 1. โจทย์มีจำนวนทั้งหมด 9 ข้อ ให้นักศึกษาเขียนอธิบายวิธีทำทุกข้อโดยละเอียด ด้วยลายมือตัวเอง **ห้ามพิมพ์**

2. **เขียนชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียน และอาจารย์ผู้สอน** ที่หัวมุมกระดาษด้านขวามือ จะไม่รับผิดชอบหากนักศึกษาเขียนข้อมูลของตนเองไม่ชัดเจน

3. กำหนดส่งภายใน **วันอาทิตย์ที่ 25 สิงหาคม 2567 ก่อนเวลา 24.00 น.** โดยส่งงานตามช่องทางที่อาจารย์ผู้สอนในแต่ละตอนเรียนกำหนด **หากส่งงานเลยกำหนดส่ง จะถูกหักคะแนน**

1. 1.1 กำหนดเส้นโค้ง $C_1 : \vec{r}(t) = < \ln(\cos t),\, 0,\, t >$

ก. จงหาเวกเตอร์สัมผัสขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{T}(t)$ และเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{N}(t)$

ข. จงหาความโค้ง $\kappa(t)$ ขณะที่ $t = \dfrac{\pi}{4}$

1.2 กำหนดเส้นโค้ง $C_2 : \vec{r}(t) = < t,\, \dfrac{t^2}{\sqrt{2}},\, \dfrac{t^3}{3} >$

ก. จงหาความยาวของส่วนของเส้นโค้ง C_2 เมื่อ $0 \le t \le 1$

ข. จงหาอัตราเร่งในแนวเวกเตอร์สัมผัส $a_T(t)$ ขณะที่ $t = \dfrac{1}{2}$

2. 2.1 กำหนดให้ $f(x,y,z) = x^2y^2(2z+1)^2$

ก. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด $P(1,-1,1)$ ในทิศทางของ $\vec{u} = < 0,3,3 >$

ข. อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด $P(1,-1,1)$ มีค่ามากที่สุดเท่าใด และเกิดขึ้นในทิศทางใด

2.2 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = (yz\ln x)\hat{i} + (2x-3yz)\hat{j} + (xy^2z^3)\hat{k}$

จงหา ก. $\operatorname{div}\vec{F}$ ข. $\operatorname{curl}\vec{F}$

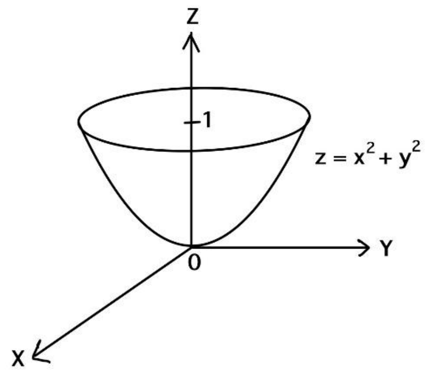
3. 3.1 กำหนดเส้นโค้ง $C : \vec{r}(t) = < 2\cos t,\, 2\sin t,\, t >$ โดยที่ $0 \le t \le 2\pi$

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_C 2x\,dx + x\,dy + z\,dz$

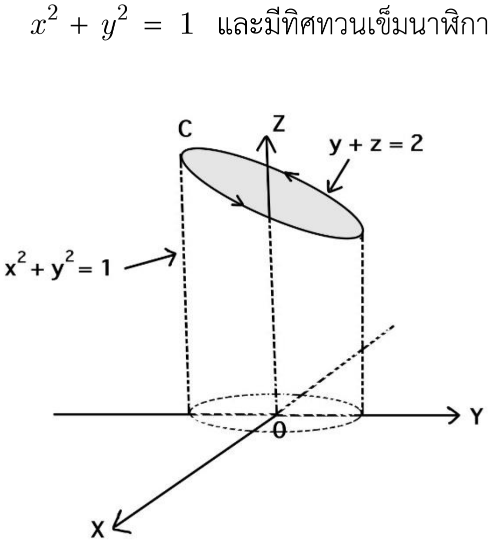
3.2 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = < yz,\ xz+2y,\ xy+2z >$ และ C เป็นเส้นโค้งจากจุด $(1,1,0)$ ไปยังจุด $(2,1,2)$ จงแสดงว่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เป็นอิสระกับวิถี (Independence of path) และหาค่าของอินทิกรัลดังกล่าว

4. กำหนดให้ $\vec{F}(x,y) = (x^2y + e^{-y})\,\hat{i} + (2xy - xe^{-y})\,\hat{j}$ และ C เป็นขอบของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = 5 - x^2$ และ $y = 0$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา จงใช้ทฤษฎีบทของกรีน (Green's theorem) หาค่าของ $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

5. จงหามวลของพื้นผิวพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2\ ;\ 0 \le z \le 1$ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นเท่ากับ $\mu(x,y,z) = k$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ (แนะ : มวล $m = \iint_S \mu(x,y,z)\,dS$)



6. จงใช้ทฤษฎีบทของสโต๊กส์ (Stokes' theorem) หางานที่เกิดจากการใช้แรง $\vec{F}(x,y,z) = z\,\hat{i} + x\,\hat{j} + y\,\hat{k}$ เพื่อเคลื่อนวัตถุไปตามเส้นขอบปิด C ซึ่งเป็นรอยตัดของระนาบ $y + z = 2$ กับพื้นผิวทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ และมีทิศทวนเข็มนาฬิกา (แนะ : งาน $W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$)



7. กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวปิดทรงกระบอกที่ถูกปิดล้อมด้วย $x^2 + y^2 = 4$ ระนาบ xy และระนาบ $z = 3$ ให้ $\vec{F}(x,y,z) = < x^3 z,\, y^3 z,\, z^2 >$ และ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์ปกติขนาดหนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากพื้นผิว S จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence theorem) หาค่าของ $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$

8. 8.1 ถ้าเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid B]$ ของระบบสมการ $AX = B$ ถูกลดรูปเป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & q-2 \\ 0 & 0 & p-4 & 1-q \end{array}\right]$$

จงหาค่า p และ q ที่ทำให้ระบบสมการ

ก. มีคำตอบเพียงชุดเดียว ข. มีคำตอบจำนวนนับไม่ถ้วน ค. ไม่มีคำตอบ

8.2 จากระบบสมการ $AX = B$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จงหา $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}\,[A \mid B]$ และหาคำตอบของระบบสมการ โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว (Elementary row operations)

9. จงหา eigenvalues ทั้งหมดของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ และหา eigenvectors ที่สมนัยกับ eigenvalue ที่มีค่ามากสุด
