Assignment I

วิชา 040203202 เมทริกซ์และการวิเคราะห์เวกเตอร์ (1/2567)

คำสั่ง ให้นักศึกษาทำโจทย์ในงานนี้ทุกข้อ และส่งงานที่ทำเสร็จเรียบร้อยแล้วต่ออาจารย์ผู้สอน พร้อมทั้งเขียนชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียน ชื่อวิชา และอาจารย์ผู้สอนให้เรียบร้อย ตามช่องทางหรือวิธีที่อาจารย์ผู้สอนกำหนด

ห้ามคัดลอกงานจากผู้อื่น และ**กำหนดส่งงานภายในวันอาทิตย์ที่ 25 สิงหาคม 2567 หากนักศึกษาคัดลอกงานหรือส่งงานช้ากว่ากำหนดจะไม่ได้คะแนนในส่วนของงานชิ้นนี้**

สมบัติและพีชคณิตของเมทริกซ์

1. 1.1) จงหาค่า x, y และ z เมื่อกำหนดให้

$$4\begin{bmatrix} x & z \\ y & -1 \end{bmatrix}^T = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

1.2) จงหาค่า a, b, c และ d จากสมการเชิงเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3) กำหนดให้ $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{4\times 4}$ โดยที่ $a_{ij} = i^2 - j^2$

ก) จงเขียนเมทริกซ์ $\mathbf{A}$

ข) จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ในข้อ ก) เป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) หรือเมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew-symmetric matrix)

1.4) จงหาค่าของ $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 9\mathbf{I}_3$ โดยที่ $\mathbf{I}_3$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 และ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

การหาดีเทอร์มิแนนต์และสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

2. 2.1) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2.2) กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ จงหา $\begin{vmatrix} g-4d & h-4e & i-4f \\ d & e & f \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix}$

2.3) ถ้า $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยที่ $\det(\mathbf{B}) = 27$ และ $\det(2\mathbf{A}^4\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = 16$ จงหา $\det(\operatorname{adj}(\mathbf{A}^{-1}))$

การหาเมทริกซ์ผกผันและสมบัติของเมทริกซ์ผกผัน

3. 3.1) กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -2 & 0 & -k \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ จงหาค่า k ที่ทำให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

3.2) กำหนดเมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ $\mathbf{A}$ คือ $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา $\det \mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}^{-1}$

3.3) กำหนดเมทริกซ์ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -x & z \\ x & 1 & -y \\ -z & y & 1 \end{bmatrix}$

ก) จงหาเงื่อนไขที่ทำให้ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

ข) ถ้า $x = y = 0$ และ $z = 2$ จงหา $\mathbf{B}^{-1}$

3.4) กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ก) จงแสดงว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular matrix) สำหรับทุกค่า θ

ข) จงหา $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ และ $\mathbf{A}^{-1}$

3.5) กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $k \neq 0$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

จงหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse matrix) ของ $\mathbf{B}$ โดยใช้วิธีการลดรูปแบบแถว (Row-reducing method)

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้อินเวอร์สและกฎของคราเมอร์

4. 4.1) พิจารณาระบบเชิงเส้น $\mathbf{AB}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ โดยที่

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ $\mathbf{x}$

4.2) พิจารณาระบบสมการ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ โดยที่

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ \text{และ} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จงหาคำตอบของระบบสมการข้างต้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

4.3) กำหนดระบบสมการ

$$\begin{aligned} xy - 2\sqrt{y} + 3zy &= 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2zy &= 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2zy &= 4 \end{aligned}$$

จงใช้กฎของคราเมอร์แก้ระบบสมการข้างต้นเพื่อหาค่าของ x, y และ z

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีของเกาส์ และแรงค์

5. 5.1) ถ้าเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ของระบบสมการเชิงเส้น กำหนดโดย

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & h^2 - 9 & h + 3 \end{array}\right]$$

จงหาเงื่อนไขของค่า h ที่ทำให้ระบบสมการ

ก) มีเพียงคำตอบเดียว (unique solution)

ข) มีคำตอบจำนวนไม่จำกัด (infinitely many solutions)

ค) ไม่มีคำตอบ (non-solution)

5.2) จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$$

5.3) กำหนดระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 3 \\ 2x + y + 18z &= a \\ -2x - y + bz &= 5 \end{aligned}$$

จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ระบบสมการมีคำตอบเดียว มีคำตอบเป็นจำนวนไม่จำกัด และไม่มีคำตอบ

5.4) จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 11x_5 &= 2 \end{aligned}$$

5.5) พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + (c^2 - 19)x_3 &= c \\ 4x_1 - x_2 + (c^2 - 14)x_3 &= c + 2 \end{aligned}$$

ถ้าคำตอบของระบบสมการมีเพียงคำตอบเดียว จงหาค่า c พร้อมทั้งหาคำตอบของระบบสมการข้างต้น

ค่าไอเกน และไอเกนเวกเตอร์

6. 6.1) กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ก) จงหาค่าไอเกน (eigenvalues) และไอเกนเวกเตอร์ (eigenvectors) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่สมนัยกับค่าไอเกนที่มีค่ามากที่สุด

ข) จงหาค่าไอเกนของเมทริกซ์ $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^3$ และ $\mathbf{A}^{-1}$

6.2) ถ้าสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ คือ

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = P_6(\lambda) = (\lambda + 3)^3(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$$

จงหา $\det(\mathbf{B})$ และ $\mathrm{trace}(\mathbf{B})$

6.3) กำหนดให้ λ เป็นค่าไอเกนที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{x}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สมนัยกับค่าไอเกน λ แล้ว จงแสดงว่า λ^2 เป็นค่าไอเกนของ $\mathbf{B}^2$ และ $\mathbf{x}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สมนัยกัน

เวกเตอร์ พีชคณิตของเวกเตอร์ และการประยุกต์

7. 7.1) จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $A(1,0,3)$, $B(0,0,6)$ และจุด $C(2,4,5)$

7.2) กำหนดเวกเตอร์ $\vec{\mathbf{u}}=\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{v}}=3\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ และ $\vec{\mathbf{w}}=\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}$

จงหา $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})$ และ $\vec{\mathbf{u}}\times(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})$

7.3) กำหนดให้ $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ และ $\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \lambda\hat{\mathbf{k}}$

ก) จงหาค่าคงที่ λ ซึ่งทำให้เวกเตอร์ทั้งสามเป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนระนาบเดียวกัน (co-planar vectors)

ข) จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelepiped) เมื่อกำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}$ เป็นขอบ เมื่อกำหนด $\lambda = -4$

7.4) กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด A, B และ C คือเวกเตอร์ $3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $-\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ และ $6\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ ตามลำดับ ให้ D และ E เป็นจุดซึ่งอยู่บนด้าน AB และ BC ตามลำดับ โดยที่ $\overrightarrow{DB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

ก) จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{DE}$ และวาดรูปสามเหลี่ยม ABC

ข) จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$

ค) จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

7.5) กำหนดให้ $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}) = 2$ จงหาค่าของ $(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\cdot\vec{\mathbf{w}}$ และ $\vec{\mathbf{v}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{w}})$

7.6) ถ้า $|\vec{\mathbf{u}}| = 2$ และ $|\vec{\mathbf{v}}| = 3$ และมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{\mathbf{u}}$ กับ $\vec{\mathbf{v}}$ เท่ากับ $\pi/3$ จงหา $|\vec{\mathbf{u}} - 2\vec{\mathbf{v}}|$

7.7) แรงคงที่ $\vec{\mathbf{F}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวเป็นเส้นตรงจากจุด $P(1,0,2)$ ไปยังจุด $Q(5,3,8)$ จงหางานที่เกิดขึ้น ถ้ากำหนดระยะทางมีหน่วยเป็นเมตรและแรงมีหน่วยเป็นนิวตัน

สมการเส้นตรงและสมการระนาบ

8. 8.1) จงหาค่า λ ที่ทำให้ระนาบ $2x+3y+4z+5=0$ ตั้งฉากกับระนาบ $2x-3y-\lambda z-5=0$

8.2) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-1,1)$ และขนานกับเส้นตรง $x+2 = \frac{1}{2}y = z-3$

8.3) จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1,-1,-1)$ และขนานกับระนาบ $5x-y-z=6$

8.4) กำหนดสมการเส้นตรง $L:\ x = 2-t,\ y = 1+t,\ z = 3t$

และสมการระนาบ $P:\ 2x-y+z = 2$

ก) จงตรวจสอบว่าเส้นตรง L ขนานกับระนาบ P หรือไม่

ข) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-1,2)$ และตั้งฉากกับระนาบ P

8.5) กำหนดระนาบ $P_1:\ x+y+z=1$ และระนาบ $P_2:\ x-y+z=1$

ก) จงหามุมระหว่างระนาบ P_1 และ P_2

ข) จงหาสมการเส้นตรงที่เป็นรอยตัดของระนาบ P_1 และ P_2

8.6) เส้นตรงสองเส้นกำหนดโดยสมการ

$$L_1:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{3-z}{4}$$

$$L_2:\ x=1+4t,\quad y=5-4t,\quad z=-1+5t$$

เมื่อ t แทนตัวแปรเสริม (parameters) ของเส้นตรง L_2

ก) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และขนานกับเส้นตรง L_1

ข) จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2

ค) จงหาสมการระนาบที่ผ่านทั้งเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2

8.7) กำหนดระนาบ $P:\ ax+(a-1)y-z=3$

และเส้นตรง $L:\ 3x+1 = \dfrac{4-2y}{3} = z+3$

ก) จงหาค่า a ที่ทำให้เส้นตรง L ไม่ตัดกับระนาบ P

ข) ถ้า $a=1$ จงหามุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ P