

Assignment I

วิชา 040203202 เมทริกซ์และการวิเคราะห์เวกเตอร์ (1/2568)

คำสั่ง ให้นักศึกษาทำโจทย์ในงานนี้ตามที่ระบุ และส่งงานที่ทำเสร็จเรียบร้อยแล้วต่ออาจารย์ผู้สอน พร้อมทั้งเขียนชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียน ชื่อวิชา และอาจารย์ผู้สอนให้เรียบร้อย ตามช่องทางหรือวิธีที่อาจารย์ผู้สอนกำหนด

ห้ามคัดลอกงานจากผู้อื่น และ กำหนดส่งงานภายในวันอาทิตย์ที่ 17 สิงหาคม 2568

หากนักศึกษาคัดลอกงานหรือส่งงานช้ากว่ากำหนดจะไม่ได้คะแนนในส่วนของงานชิ้นนี้

สมบัติและพีชคณิตของเมทริกซ์

ให้นักศึกษาเลือกทำ 1 ข้อย่อย จากข้อ 1.1 ถึงข้อ 1.4

1. 1.1) จงหาค่า x, y และ z เมื่อกำหนดให้

$$4 \begin{bmatrix} x & z \\ y & -1 \end{bmatrix}^T = 2 \begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

1.2) จงหาค่า a, b, c และ d จากสมการเชิงเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3) กำหนดให้ $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ โดยที่ $a_{ij} = i^2 - j^2$

ก) จงเขียนเมทริกซ์ $\mathbf{A}$

ข) จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ในข้อ ก) เป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) หรือเมทริกซ์เสกซ์สมมาตร (Skew-symmetric matrix)

1.4) จงหาค่าของ $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 9\mathbf{I}_3$ โดยที่ $\mathbf{I}_3$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 และ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

การหาดีเทอร์มิแนนต์และสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

ให้นักศึกษาเลือกทำ 1 ข้อย่อย จากข้อ 2.1 ถึงข้อ 2.3

2. 2.1) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2.2) กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ จงหา $\begin{vmatrix} g-4d & h-4e & i-4f \\ d & e & f \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix}$

2.3) ถ้า $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยที่ $\det(\mathbf{B}) = 27$ และ $\det(2\mathbf{A}^4\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = 16$
 จงหา $\det(\text{adj}(\mathbf{A}^{-1}))$

การหาเมทริกซ์ผกผันและสมบัติของเมทริกซ์ผกผัน

ให้นักศึกษาเลือกทำ 1 ข้อย่อย จากข้อ 3.1 ถึงข้อ 3.5

3. 3.1) กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -2 & 0 & -k \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ จงหาค่า k ที่ทำให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

3.2) กำหนดเมทริกซ์ผกผัน (adjoint matrix) ของ $\mathbf{A}$ คือ $\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา $\det \mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}^{-1}$

3.3) กำหนดเมทริกซ์ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -x & z \\ x & 1 & -y \\ -z & y & 1 \end{bmatrix}$

ก) จงหาเงื่อนไขที่ทำให้ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

ข) ถ้า $x = y = 0$ และ $z = 2$ จงหา $\mathbf{B}^{-1}$

3.4) กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ก) จงแสดงว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular matrix) สำหรับทุกค่า θ

ข) จงหา $\text{adj}(\mathbf{A})$ และ $\mathbf{A}^{-1}$

3.5) กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $k \neq 0$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

จงหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse matrix) ของ $\mathbf{B}$ โดยใช้วิธีการลดรูปแบบแถว (Row-reducing method)

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้อินเวอร์สและกฎของคราเมอร์
ให้นักศึกษาเลือกทำ 1 ข้อย่อย จากข้อ 4.1 ถึงข้อ 4.3

4. 4.1) พิจารณาระบบเชิงเส้น $ABx = b$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ x

- 4.2) พิจารณาระบบสมการ $Ax = b$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จงหาคำตอบของระบบสมการข้างต้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

- 4.3) กำหนดระบบสมการ

$$xy - 2\sqrt{y} + 3zy = 8$$

$$2xy - 3\sqrt{y} + 2zy = 7$$

$$-xy + \sqrt{y} + 2zy = 4$$

จงใช้กฎของคราเมอร์แก้ระบบสมการข้างต้นเพื่อหาค่าของ x, y และ z

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีของเกาส์ และแรงค์
ให้นักศึกษาเลือกทำ 1 ข้อย่อย จากข้อ 5.1 ถึงข้อ 5.5

5. 5.1) ถ้าเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ของระบบสมการเชิงเส้น กำหนดโดย

$$[A | \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & h^2 - 9 & h + 3 \end{array} \right]$$

จงหาเงื่อนไขของค่า h ที่ทำให้ระบบสมการ

- ก) มีเพียงคำตอบเดียว (unique solution)
- ข) มีคำตอบจำนวนไม่จำกัด (infinitely many solutions)
- ค) ไม่มีคำตอบ (non-solution)

- 5.2) จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x &\quad -3w = -3 \end{aligned}$$

- 5.3) กำหนดระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 3 \\ 2x + y + 18z &= a \\ -2x - y + bz &= 5 \end{aligned}$$

จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ระบบสมการมีคำตอบเดียว มีคำตอบเป็นจำนวนไม่จำกัด และไม่มีคำตอบ

- 5.4) จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 11x_5 &= 2 \end{aligned}$$

- 5.5) พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + (c^2 - 19)x_3 &= c \\ 4x_1 - x_2 + (c^2 - 14)x_3 &= c + 2 \end{aligned}$$

ถ้าคำตอบของระบบสมการมีเพียงคำตอบเดียว จงหาค่า c พร้อมทั้งหาคำตอบของระบบสมการข้างต้น

ค่าไอเกน และไอเกนเวกเตอร์

ให้นักศึกษาเลือกทำ 1 ข้อย่อย จากข้อ 6.1 ถึงข้อ 6.3

6. 6.1) กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ก) จงหาค่าไอเกน (eigenvalues) และไอเกนเวกเตอร์ (eigenvectors) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่สมนัยกับค่าไอเกนที่มีค่ามากที่สุด

ข) จงหาค่าไอเกนของเมทริกซ์ $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^3$ และ $\mathbf{A}^{-1}$

6.2) ถ้าสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ คือ

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = P_6(\lambda) = (\lambda + 3)^3(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$$

จงหา $\det(\mathbf{B})$ และ $\text{trace}(\mathbf{B})$

6.3) กำหนดให้ λ เป็นค่าไอเกนที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{x}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สมนัยกับค่าไอเกน λ แล้ว จงแสดงว่า λ^2 เป็นค่าไอเกนของ $\mathbf{B}^2$ และ $\mathbf{x}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สมนัยกัน

เวกเตอร์ พีชคณิตของเวกเตอร์ และการประยุกต์

ให้นักศึกษาเลือกทำ 2 ข้อย่อย จากข้อ 7.1 ถึงข้อ 7.7

7. 7.1) จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $A(1,0,3)$, $B(0,0,6)$ และจุด $C(2,4,5)$
- 7.2) กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ และ $\vec{w} = \hat{j} - 5\hat{k}$
 จงหา $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ และ $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- 7.3) กำหนดให้ $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ และ $\vec{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$
 ก) จงหาค่าคงที่ λ ซึ่งทำให้เวกเตอร์ทั้งสามเป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนระนาบเดียวกัน (co-planar vectors)
 ข) จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelepiped) เมื่อกำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นขอบ เมื่อกำหนด $\lambda = -4$
- 7.4) กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด A , B และ C คือเวกเตอร์ $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ และ $6\hat{j} + 3\hat{k}$ ตามลำดับ ให้ D และ E เป็นจุดซึ่งอยู่บนด้าน AB และ BC ตามลำดับ โดยที่ $\vec{DB} = \frac{2}{3} \vec{AB}$ และ $\vec{BE} = \frac{2}{3} \vec{BC}$
 ก) จงหาเวกเตอร์ $\vec{DE}$ และวาดรูปสามเหลี่ยม ABC
 ข) จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{AB}$ กับ $\vec{AC}$
 ค) จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC
- 7.5) กำหนดให้ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2$ จงหาค่าของ $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ และ $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$
- 7.6) ถ้า $|\vec{u}| = 2$ และ $|\vec{v}| = 3$ และมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เท่ากับ $\pi/3$ จงหา $|\vec{u} - 2\vec{v}|$
- 7.7) แรงคงที่ $\vec{F} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 10\hat{k}$ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวเป็นเส้นตรงจากจุด $P(1,0,2)$ ไปยังจุด $Q(5,3,8)$ จงหางานที่เกิดขึ้น ถ้ากำหนดระยะทางมีหน่วยเป็นเมตรและแรงมีหน่วยเป็นนิวตัน

สมการเส้นตรงและสมการระนาบ

ให้นักศึกษาเลือกทำ 2 ข้อย่อย จากข้อ 8.1 ถึงข้อ 8.7

8. 8.1) จงหาค่า λ ที่ทำให้ระนาบ $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ ตั้งฉากกับระนาบ $2x - 3y - \lambda z - 5 = 0$

8.2) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -1, 1)$ และขนานกับเส้นตรง $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

8.3) จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, -1, -1)$ และขนานกับระนาบ $5x - y - z = 6$

8.4) กำหนดสมการเส้นตรง $L : x = 2 - t, y = 1 + t, z = 3t$
และสมการระนาบ $P : 2x - y + z = 2$

ก) จงตรวจสอบว่าเส้นตรง L ขนานกับระนาบ P หรือไม่

ข) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -1, 2)$ และตั้งฉากกับระนาบ P

8.5) กำหนดระนาบ $P_1 : x + y + z = 1$ และระนาบ $P_2 : x - y + z = 1$

ก) จงหามุมระหว่างระนาบ P_1 และ P_2

ข) จงหาสมการเส้นตรงที่เป็นรอยตัดของระนาบ P_1 และ P_2

8.6) เส้นตรงสองเส้นกำหนดโดยสมการ

$$L_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{3-z}{4}$$

$$L_2 : x = 1 + 4t, y = 5 - 4t, z = -1 + 5t$$

เมื่อ t แทนตัวแปรเสริม (parameters) ของเส้นตรง L_2

ก) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และขนานกับเส้นตรง L_1

ข) จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2

ค) จงหาสมการระนาบที่ผ่านทั้งเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2

8.7) กำหนดระนาบ $P : ax + (a-1)y - z = 3$

และเส้นตรง $L : 3x + 1 = \frac{4-2y}{3} = z + 3$

ก) จงหาค่า a ที่ทำให้เส้นตรง L ไม่ตัดกับระนาบ P

ข) ถ้า $a = 1$ จงหามุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ P